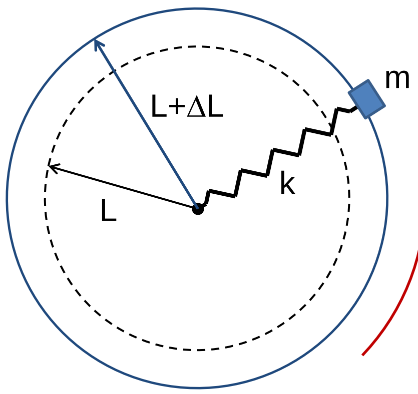
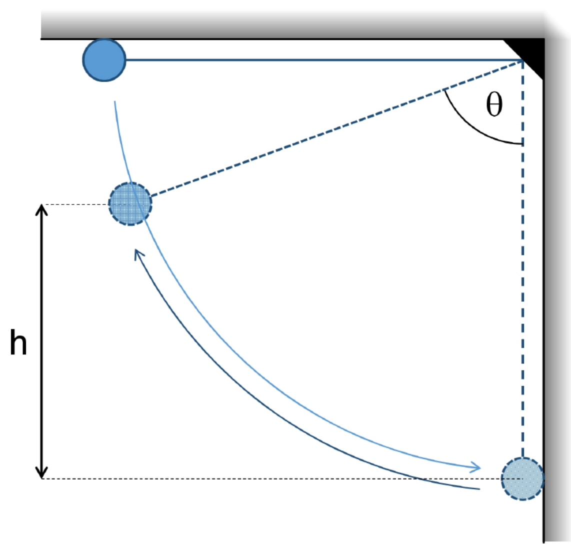
Cvičení 10

1. Závaží o hmotnosti $m = 100$ g upevněné na pružině o zanedbatelné hmotnosti a tuhosti $k = 200$ kg s^{-2} koná rovnoměrný kruhový pohyb naznačený na obrázku. Frekvence otáčení je $f = 5$ Hz. Určete prodloužení pružiny ΔL, pokud je její délka v nenapjatém stavu $L = 10$ cm.



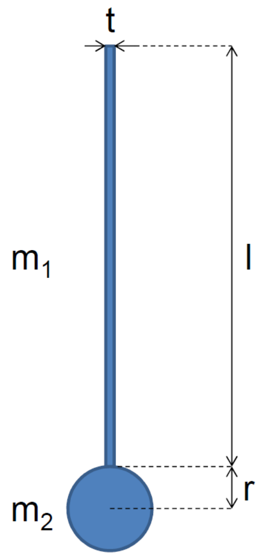
[*řešení:* $\Delta L = L\left(\frac{k}{4\pi^2 f^2 m} - 1\right)^{-1} = 9.7$ cm]

2. Jednoduché matematické kyvadlo tvořené kuličkou upevněnou na vlákně o délce L je zavěšeno u zdi. Kyvadlo vychýlíme do vodorovné polohy a pustíme. Při každém úderu o stěnu potom platí, že rychlost kuličky po odrazu od stěny se zmenší faktorem $\frac{3}{\sqrt{10}}$. Kolikrát musí kulička odskočit od stěny, aby byla maximální výchylka kuličky od stěny menší než 60°?



[*řešení:* $n_0 = 7$]

3. Hodinové kyvadlo je tvorené tyčí o hmotnosti $m_1 = 1$ kg, délce $l = 100$ cm a šírce $t = 2$ cm a diskem o hmotnosti $m_2 = 3$ kg a poloměru $r = 10$ cm viz obrázek. Vypočítejte dobu kyvu τ tohoto kyvadla.



[*řešení:* $\tau = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{12}m_1 t^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2(r+l)^2}{g(\frac{1}{2}m_1 l + m_2 l + m_2 r)}} = 1.004$ s]

4. Na těleso působí napětí v rovině xy a jeho napěťový stav je popsán tenzorem napětí

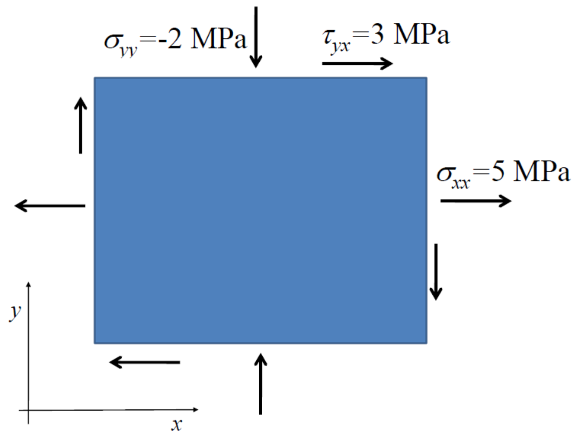
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

(a) Najděte vyjádření tenzoru napětí v soustavě souřadnic pootočené v rovině xy o úhel ϑ.
(b) O jaký úhel ϑ musíme v rovině xy otočit souřadnicové osy abychom dostali normály k hlavním rovinám?

[*řešení:* (a)
$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx}\cos^2\vartheta + \sigma_{yy}\sin^2\vartheta + 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta$
$\sigma'_{yy} = \sigma_{xx}\sin^2\vartheta + \sigma_{yy}\cos^2\vartheta - 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta$
$\tau'_{xy} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin\vartheta\cos\vartheta + \tau_{xy}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$
(b) $\vartheta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$]

5. Na těleso působí v rovině napětí xy podle obrázku na druhé straně. Najděte hlavní roviny a maximální a minimální hodnotu napětí.

[*řešení:* Normály k hlavním rovinám jsou vzájemně kolmé vektory pootočené v rovině xy vzhledem k osám x a y o úhel $20.3°$, tj. vektory o souřadnicích $(0.94, 0.35)$ a $(-0.35, 0.94)$. Maximální hodnota napětí je $\sigma_1 = 6.1$ MPa, minimální hodnota napětí je $\sigma_2 = -3.1$ MPa.]



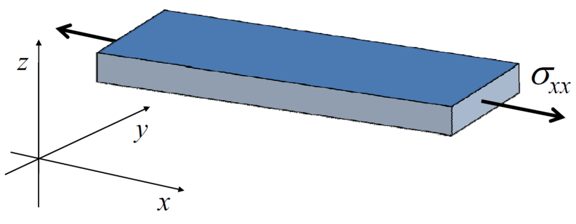
6. Izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν je ve stavu napjatosti popsaném tenzorem napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Vypočítejte tenzor malých deformací.

[*řešení:*
$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$
$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$
$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$
$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$
$\varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz}$
$\varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz}$]

7. Na izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν působí tahové napětí podle obrázku. Jakým napětím σ_{yy} musíme působit aby deformace ve směru osy x byla nulová? Jaká bude v takovém případě deformace ve směru osy y a z?



[*řešení:* $\sigma_{yy} = \frac{1}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\frac{1-\nu^2}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xx}$]

8. Ukažte, že modul pružnosti ve smyku je $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Základní vztahy a údaje

odstředivá síla: $\vec{F}_{od} = -m\vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r})$
Coriolisova síla: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

hmotný střed soustavy hmotných bodů:
$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$
$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$
$z_T = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$

hmotný střed homogenního tělesa:
$x_T = \frac{1}{V}\int_V x \; \mathrm{d}V = \frac{1}{S}\int_S x \; \mathrm{d}S = \frac{1}{L}\int_L x \; \mathrm{d}L$
$y_T = \frac{1}{V}\int_V y \; \mathrm{d}V = \frac{1}{S}\int_S y \; \mathrm{d}S = \frac{1}{L}\int_L y \; \mathrm{d}L$
$z_T = \frac{1}{V}\int_V z \; \mathrm{d}V = \frac{1}{S}\int_S z \; \mathrm{d}S = \frac{1}{L}\int_L z \; \mathrm{d}L$

moment setrvačnosti homogenního tělesa:
$J = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \frac{M}{V}\int_V r_\perp^2 \mathrm{d}V$,
kde $r_\perp$ značí kolmou vzdálenost od osy otáčení.

kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

Steinerova věta:
$J = J_T + MR_T^2$,
kde J_T je moment setrvačnosti tělesa vůči ose o_T procházející hmotným středem tělesa, J je moment setrvačnosti téhož tělesa vůči ose o', která je rovnoběžná s osou otáčení o_T a její kolmá vzdálenost od hmotného středu je R_T.

perioda kmitů fyzického kyvadla:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_T + MR^2}{MgR}}$,
kde J_T je moment setrvačnosti kyvadla podle osy otáčení procházející hmotným středem a R značí vzdálenost hmotného středu od osy otáčení.

transformační matice pro otočení v rovině o úhel ϑ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

transformace tenzoru 2. řádu: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{A}^T$

Hookův zákon pro izotropní prostředí: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}]$